PROBLEMA 1

Un ordinador personal té operatius dos programes antivirus $A1$ i $A2$ que actuen simultàniament i de forma independent. Davant la presència d'un virus, el programa $A1$ el detecta amb una probabilitat de 0.9 i el programa $A2$ el detecta amb una probabilitat de 0.8. Calculeu de forma raonada:

(a) La probabilitat que un virus qualsevol sigui detectat. (0.5 punts)

(b) Si un virus ha estat detectat, quina és la probabilitat que l'hagi detectat l'antivirus $A1$? (0.5 punts)

(c) Si un virus ha estat detectat, quina és la probabilitat que l'hagin detectat els dos antivirus $A1$ i $A2$? (0.75 punts)

(d) Un software addicional altera el funcionament de l'antivirus $A2$ de manera que la probabilitat que detecti un virus ja no és de 0.8. Quina és aquesta nova probabilitat si sabem que un virus és detectat per $A1$ i no per $A2$ amb probabilitat 0.27? (0.75 punts)

Resposta:

(a) Per tal de no ser detectat cal que el virus escapi a la detecció dels dos antivirus a l'hora; això té una probabilitat de $(1-0.9)(1-0.8) = 0.02$ ja que els successos són independents. Per tant, la probabilitat de ser detectat és la contrària, $1 - 0.02 = 0.98$.

Alternativament, també podem calcular directament la probabilitat que almenys un dels dos antivirus detecti el virus. Si denotem per A_1 el succés "l'antivirus $A1$ detecta el virus", i el mateix per A_2, tenim:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.9 + 0.8 - 0.72 = 0.98,$$

fent servir la independència per calcular $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$.

(b) Ens demanen la probabilitat que el virus hagi estat detectat per l'antivirus $A1$, condicionada a haver estat detectat, és a dir $P(A_1 \mid \text{detectat})$. A partir de la definició de probabilitat condicionada, tenim

$$P(A_1 \mid \text{detectat}) = \frac{P(A_1 \cap \text{detectat})}{P(\text{detectat})} = \frac{P(A_1)}{P(\text{detectat})} = \frac{0.9}{0.98} = 0.9184.$$

(c) De manera anàloga a l'apartat anterior, tenim

$$P(A_1 \cap A_2 \mid \text{detectat}) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \text{detectat})}{P(\text{detectat})} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(\text{detectat})} = \frac{0.72}{0.98} = 0.7347.$$

(d) Sabem que la nova probabilitat de ser detectat per $A1$ i no per $A2$ és de 0.27, és a dir, $0.9 \cdot (1 - P(A_2)) = 0.27$. Per tant, $P(A_2) = 1 - \frac{0.27}{0.9} = 0.7$.

PROBLEMA 2

En un poble hi ha dos instituts que anomenarem $A1$ i $A2$. En tots dos instituts es pot estudiar el batxillerat científic (que anomenarem C) i l'humanístic (que anomenarem H). Seleccionem un alumne a l'atzar i se sap que la probabilitat que pertanyi a l'institut $A1$ és de 0.3, i la probabilitat que pertanyi a l'institut $A2$ és de 0.7. D'altra banda, la probabilitat que estudiï el batxillerat científic si sabem que pertany a l'institut $A1$ és de 0.55 mentre que la probabilitat que estudiï el batxillerat científic si sabem que pertany a l'institut $A2$ és de 0.59.

(a) Calcula les probabilitats que un alumne estudiï el batxillerat C a l'institut $A1$, que estudiï el batxillerat C a l'institut $A2$, que estudiï el batxillerat H a l'institut $A1$, i que estudiï el batxillerat H a l'institut $A2$. (1 punt)

(b) Si en aquest poble hi ha exactament 1.000 estudiants, quants estuïen cada batxillerat a cada institut? (0.5 punts)

(c) El curs vinent arribaran 20 alumnes nous al poble i tots faran batxillerat H a l'institut $A1$. Quina serà la nova probabilitat que un alumne estudiï batxillerat C si sabem que pertany a l'institut $A1$? (1 punt)

Resposta: (a) Les quatre probabilitats demanades són

$$P(A_1 \cap C) = P(C \mid A_1)P(A_1) = 0.55 \cdot 0.3 = 0.165,$$

$$P(A_1 \cap H) = P(H \mid A_1)P(A_1) = (1 - 0.55) \cdot 0.3 = 0.135,$$

$$P(A_2 \cap C) = P(C \mid A_2)P(A_2) = 0.59 \cdot 0.7 = 0.413,$$

$$P(A_2 \cap H) = P(H \mid A_2)P(A_2) = (1 - 0.59) \cdot 0.7 = 0.287.$$

(b) Multiplicant les probabilitats anteriors pels 1.000 estudiants, resulta que 165 estudien el batxillerat C a l'institut $A1$, 135 estudien el batxillerat H a l'institut $A1$, 413 estudien el batxillerat C a l'institut $A2$, i 287 estudien el batxillerat H a l'institut $A2$ (efectivament, $165 + 135 + 413 + 287 = 1.000$).

(c) Afegint els 20 nous estudiants, la probabilitat demanada queda així:

$$P(C \mid A_1) = \frac{P(C \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{165}{1020}}{\frac{165+135+20}{1020}} = \frac{165}{320} = 0.5156.$$

PROBLEMA 3

Els components electrònics produïts per una determinada empresa són defectuosos amb una certa probabilitat p (independentment els uns dels altres). L'empresa ven els components en paquets de 10 i es compromet a retornar els diners si el paquet conté 2 o més components defectuosos.

(a) Calcula, en funció de p, la probabilitat que et retornin els diners si compres un paquet de components. (0.75 punts)

(b) Si p = 0.01, quina és la probabilitat de que, comprant 3 paquets de components, et retornin els diners de, com a mínim, un dels paquets? Aquest resultat augmenta o disminueix quan p augmenta? Raona la resposta. (1 punt)

(c) Si p = 0.01, calcula la probabilitat que comprant 4 paquets et retornin els diners d'exactament dos d'ells. (0.75 punts)

Resposta: (a) Per tal que no ens retornin els diners, cal que o bé tots deu components siguin bons, cosa que passa amb probabilitat $(1-p)^{10}$, o bé que n'hi hagi només un de defectuós, cosa que passa amb probabilitat $10p(1-p)^9$. Per tant, la probabilitat que ens retornin els diners és de $\alpha = 1-(1-p)^{10} - 10p(1-p)^9$.

(b) Segons l'apartat anterior, de cadascun dels tres paquets comprats ens retornaran els diners amb probabilitat $\alpha = 1-(1-0.01)^{10} - 10 \cdot 0.01 \cdot (1-0.01)^9 = 0.0043$. Per tant, no ens retronaran els diners de cap d'ells amb probabilitat $(1-\alpha)^3 = (0.9957)^3 = 0.9872$, i ens en retornaran almenys un amb probabilitat $1 - 0.9872 = 0.0128$.

Clarament, si p augmenta, llavors α augmenta, i el resultat $1-(1-\alpha)^3$ també augmenta.

(c) La probabilitat que, comprant 4 paquets, ens retornin els diners d'exactament dos és

$$\binom{4}{2}\alpha^2(1-\alpha)^2 = 6 \cdot (0.0043)^2 \cdot (0.9957)^2 = 0.0001.$$

PROBLEMA 4

Considera l'experiment següent: tirem un dau equilibrat i, a continuació, tirem tantes monedes (equilibrades també) com indiqui el resultat del dau.

(a) Calcula la probabilitat que obtinguem exactament 3 cares. (0.75 punts)

(b) Calcula la probabilitat que obtinguem exactament 3 cares sabent que el resultat del dau ha estat un nombre parell. (0.75 punts)

(c) Calcula la probabilitat que obtinguem exactament 3 cares sabent que la primera moneda ha donat creu. (1 punt)

Resposta: (a) Per tal que ens surtin 3 cares cal que al dau hi hagi sortit, prèviament, un 3, un 4, un 5, ó un 6. Si surt un 3, la probabilitat d'obtenir 3 cares és $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, si surt un 4 és $\binom{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, si surt un 5 és $\binom{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$, i si surt un 6 és $\binom{6}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$. Per tant, per la llei de la probabilitat total, la probabilitat que en total surtin exactament tres cares és

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{16}=0.1666.$$

(b) Sabent que al tirar el dau ha sortit un nombre parell, hi ha una probabilitat de $\frac{1}{3}$ per cadascun dels possibles resultats 2, 4, i 6. Per tant, en aquest cas, la probabilitat d'obtenir exactament 3 cares és

$$\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}+\frac{5}{48}=0.1875.$$

Alternativament, la probabilitat demanada és

$$P(3\text{ cares}\mid\text{parell})=\frac{P(3\text{ cares}\cap\text{parell})}{P(\text{parell})}.$$

La probabilitat del denominador és clarament $\frac{1}{2}$. Per calcular la del numerador, argumentem com a l'apartat (a), però ara només ens quedem els termes corresponents a 4 i a 6 cares. Per tant,

$$P(3\text{ cares}\mid\text{parell})=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{16}}{1/2}=0.1875.$$

(c) Per obtenir tres cares, havent donat creu la primera moneda, cal que prèviament al dau hi hagi sortit un 4, un 5, ó un 6. En tal cas, la probabilitat d'obtenir exactament tres cares és

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\binom{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\binom{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{48}+\frac{1}{24}+\frac{5}{96}=0.1146.$$

De nou, podríem també calcular-ho a partir de la definició de probabilitat condicionada:

$$P(3 \text{ cares} \mid 1\text{a creu}) = \frac{P(3 \text{ cares} \cap 1\text{a creu})}{P(1\text{a creu})} = \frac{P(3 \text{ cares} \cap 1\text{a creu})}{1/2}.$$

La probabilitat del numerador és la probabilitat de que al dau hi surti 4, 5 ó 6, la primera moneda sigui creu, i hi hagi exactament 3 cares en les tirades restants, és a dir:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\binom{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\binom{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{96}+\frac{1}{48}+\frac{5}{192}=0.0573.$$

Per tant, la probabilitat demanada val $\frac{0.0573}{0.5} = 0.1146$.

PROBLEMA 5

L'Anna i el Blai juguen al joc següent: començant per l'Anna, s'alternen tirant una moneda equilibrada fins a un màxim de 4 cops cadascú; el primer que obtingui cara guanya, i si els hi surten vuit creus empaten.

(a) Calcula la probabilitat que guanyi l'Anna i la probabilitat que guanyi el Blai. Qui té més possibilitats de guanyar? (1 punt)

(b) Aquestes dues quantitats han de sumar 1? Justifica la resposta. (0.5 punts)

(c) Ara suposem que la moneda està trucada i que la probabilitat que surti cara en una tirada és $0 < p < 1$. Quan ha de ser p per tal que l'Anna tingui el triple de possibilitats de guanyar el joc? (1 punt)

Resposta: (a) La moneda la tira primer l'Anna, després el Blai, etc, fins que surt la primera cara, que fa guanyar a qui l'hagi treta; si a la vuitena tirada encara no ha sortit cap cara s'acaba el joc i empaten. Per tant, l'Anna guanyarà el joc si surt cara a la primera tirada, o si surten dues creus i cara a la tercera tirada, o quatre creus i cara a la cinquena, o sis creus i cara a la setena. La probabilitat que això passi és

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}=0.6641.$$

Anàlogament, el Blai guanyarà el joc si surt creu a la primera tirada i cara a la segona, o si surten tres creus i cara a la quarta tirada, o cinc creus i cara a la sisena, o set creus i cara a la vuitena. La probabilitat que això passi és

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}=0.3320.$$

Té doncs més possibilitats de guanyar l'Anna que el Blai (de fet, exactament el doble si no tenim en compte els arrodoniments).

(b) Aquestes dues probabilitats no han de sumar 1 perque hi ha una petita possibilitat que empatin i no guanyi ningú el joc. Això passarà quan surtin 8 creus, cosa que té una probabilitat de

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8=0.0039.$$

I, efectivament, la suma $0.6641+0.3320+0.0039$ ara sí que dóna 1.

(c) Repetint el càlcul en funció de p, les probabilitats que guanyi l'Anna i el Blai són

$$P(\text{Anna})=p+(1-p)^2p+(1-p)^4p+(1-p)^6p,$$

$$P(\text{Blai})=(1-p)p+(1-p)^3p+(1-p)^5p+(1-p)^7p.$$

Com que treient factor comú tenim que $P(\text{Blai})=(1-p)P(\text{Anna})$, el que ens demanen passarà quan $1-p=\frac{1}{3}$ és a dir $p=\frac{2}{3}$.

PROBLEMA 6

Tirem un dau equilibrat repetides vegades fins que surti un sis, moment en el qual parem.

(a) Quina és la probabilitat que després de* n *tirades encara no hagi sortit cap sis? (0.5 punts)

(b) Quantes tirades hem de fer, com a mínim, per tal que la probabilitat que surti un sis sigui igual o superior a 0.95? (1 punt)

(c) Sabent que ens ha sortit el primer sis a la cinquena tirada, quina és la probabilitat que no hagi sortit cap cinc ni cap quatre? (1 punt)

Resposta: (a) La probabilitat no hagi sortit cap sis després de n tirades és $\left(1-\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

(b) Volem que l'esdeveniment contrari al de l'apartat anterior tingui probabilitat igual o superior a 0.95:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0.95 \quad \to \quad 0.05 \geqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \to \quad \log 0.05 \geqslant n\log(5/6) \quad \to$$

$$\to \quad 16.43 = \frac{\log 0.05}{\log 5/6} \leqslant n.$$

Per tant, calen com a mínim 17 tirades.

(c) Sabent que a les quatre primeres tirades no ha sortit cap sis, la probabilitat que tampoc hagin sortin ni el cinc ni el quatre és

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = 0.1296.$$